射影空間上のuniformベクトル束について

代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.100-116

射影空間上の uniform ベクトル束について

九州大教養 佐藤栄一

基礎体を標数0の代数的閉体(k)とする。
Eをn次元射影空間P^n上のベクトル束とする。

<u>定義</u> Eが uniform ベクトル束とは、P^n上の任意の直線ℓに対し、$E|_\ell$が一定であるときにいう(Grothendieckの定理より $E|_\ell \simeq \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$ $(a_1>a_2>\cdots>a_\alpha,\ r_i>0)$ とする)。

この時 Eがhomogeneousならuniformは明白だが、逆は問題である。さらにもし反例があるならこの2つの性質の間にはどのくらいのgapがあるかが問題になる。即ち次が成立する。

<u>主定理</u> ① EをP^n上のuniformベクトル束とする。Eの階数が$2n-1$以下ならhomogeneousベクトル束である。

② uniformだがhomogeneousでないP^n上の階数$2n$のベクトル束が存在する。

もう少しくわしく述べると①に関連して

(イ) $r_i \le n-2$ $(n\ge 3, \forall i)$ なら Eは直線束の直

和である

例 $n=2$ で $r_i=1$ $(\forall i)$ ならば、$E \simeq \oplus S^{b_i}(U)(c_i)$

(ここで $S^{b_i}(U)$ は $U(=T_{P^2}(-1))$ の b_i 次 Symmetric tensor である。)

最近、Elencwajg が階数4の P^2 上の uniform ベクトル束で homogeneous でない例をあげ、さらに P^n 上で階数が $3n-1$ の uniform だが homogeneous でないベクトル束を構成している。[1][2]

§1 $X = P^1 \cup P^1 \left(\simeq \mathrm{Proj}\, k[X,Y,Z]/(XY)\right)$ 上のベクトル束について。

P^1 上のベクトル束の分解定理と同様に次が成立する。

<u>定理 1.1</u> $X = P^1 \cup P^1$ 上のベクトル束 (E) は、直線束の直和である。

($P^1 \cup P^1$ 上の直線束 L を各直線に制限すると、$\mathcal{O}_{P^1}(a)$ と書けるので $L = L(a,b)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とかくと $E \simeq \oplus_i L(a_i, b_i)$ と書ける。)

一方 X 上のベクトル束を別の形で表わした

い。そのために

<u>命題 1.2.</u> $E \simeq \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$ $(a_1 > a_2 > \cdots > a_\alpha,\ r_i > 0)$，$F \cong \bigoplus_{i=1}^{\beta} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$ $(\beta < \alpha)$ とする。その時，F に同型な E の部分束は，唯一つしかない。

（上の部分束を E_β と書く。）

今，E を $X = P_1^1 \cup P_2^1$ 上のベクトル束とし，$E|_{P_i^1} = {}_iE$ と書く。この時，命題 1.2 より，${}_iE_\beta \otimes k(x)$ は $E \otimes k(x)$ の部分ベクトル空間と考えられ，$(x = P_1^1 \cap P_2^1)$ $\dim({}_1E_\beta \otimes k(x)) \cap ({}_2E_\gamma \otimes k(x))$ が定義できる。これを $E(P_1^1, P_2^1, \beta, \gamma)$ と書く。さらに E を P^n 上の uniform ベクトル束 $(E|_\ell \simeq \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$ $a_1 > \cdots > a_\alpha,\ r_i > 0)$ とし ℓ_1, ℓ_2 を P^n の交わる直線とする時，$E|_{\ell_1 \cup \ell_2}$ に対して，上述のように $E(\ell_1, \ell_2; \beta, \gamma)$ が定義できる。

<u>定理 1.3</u> E を $P_1^1 \cup P_2^1$ 上のベクトル束とし，$E|_{P_j^1} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$ $(a_1 > \cdots > a_\alpha,\ r_i > 0)$ とする。今，$1 \leq \beta, \gamma \leq \alpha$ に対して，$E(P_1^1, P_2^1; \beta, \gamma)\ (= E(\beta, \gamma))$ が与えられたとすると E は $\bigoplus_{1 \leq i, j \leq \alpha} L(a_i, a_j)^{\oplus f_{ij}}$ に同型である。但し $f_{ij} = E(i, j) - E(i-1, j) - E(i, j-1) + E(i-1, j-1)$ $(i \geq 2, j \geq 2)$。又 $f_{i1} = E(i, 1)$，$f_{1j} = E(1, j)$ である。

4

§2. E を uniform ベクトル束 ($E|_\ell = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$, $a_1 > \cdots > a_\alpha$, $r_i > 0$) とする。以後 E とはこのことを意味する。さて次の図式を考える。

$$(2.1)\qquad \begin{array}{ccccc} & & Fl(n.1.0) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ P^n & & & & Gr(n.1) \end{array}$$

ここで $Gr(n.1)$ は P^n の直線をパラメーターライズした Grassmann 多様体、 $Fl(n.1.0) = \{(x, y) \in P^n \times Gr(n.1) \mid L_y \ni x \quad L_y$ は y に対応する直線$\}$ とする。その時 p^*E は次のような splitting をもつ。

<u>命題 2.2</u> uniform ベクトル束 E に対し、$Gr(n.1)$ 上のベクトル束の列 $E_1, E_2, \cdots, E_\alpha$, と $Fl(n.1.0)$ 上のベクトル束の列 $F_1(=p^*E), F_2, \cdots, F_{\alpha-1}$ があり次を満す。

$$0 \longrightarrow q^*E_1 \otimes p^*\mathcal{O}(a_1) \longrightarrow p^*E \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$$
$$\cdots$$
$$0 \longrightarrow q^*E_i \otimes p^*\mathcal{O}(a_i) \longrightarrow F_i \xrightarrow{g_i} F_{i+1} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow qE_{\alpha-1} \otimes p^*\mathcal{O}(a_{\alpha-1}) \longrightarrow F_{\alpha-1} \longrightarrow qE_\alpha \otimes p^*\mathcal{O}(a_\alpha) \to 0$$

($p^*\mathcal{O}(a)$ とは $p^*\mathcal{O}_{P^n}(a)$ を表わす)

次に上の完全列において

$$(2.3)\quad 0 \longrightarrow \bar{F}_\beta \longrightarrow p^*E \xrightarrow{g_\beta} F_\beta \longrightarrow 0 \qquad (2 \le \beta \le \alpha-1)$$

を考える。

今、次のような仮定を書く。L を P^n の直線とし

(A) Lと交わる任意の直線ℓと、$\sigma L=L$なる任意のP^nの自己同型σに対しベクトル束の同型ι; $E|_{L\cup\ell} \xrightarrow{\sim} E|_{L\cup\sigma\ell}$が存在する。

今上述のL, σを固定する。σは同型$\tilde\sigma: p^{-1}(L) \to p^{-1}(L)$を導く（$p^{-1}(L)\subset F\ell(n.1.0)$）。直線$\ell_1$（$\ell_1\cap L \neq \phi$）をとり、$\ell_2=\sigma\ell_1$とする。その時完全列(2.3)を$p^{-1}(L\cup\ell_i)$に制限する。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bar F_\beta|_{p^{-1}(L\cup\ell_1)} & \xrightarrow{h} & p^*E|_{p^{-1}(L\cup\ell_1)} & \longrightarrow & F_\beta|_{p^{-1}(L\cup\ell_1)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow\iota & & & & \\
0 & \longrightarrow & \bar F_\beta|_{p^{-1}(L\cup\ell_2)} & \longrightarrow & p^*E|_{p^{-1}(L\cup\ell_2)} & \xrightarrow{j} & F_\beta|_{p^{-1}(L\cup\ell_2)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ℓ_iに対応する$G_r(n.1)$上の点をz_iとする時、$\bar F_\beta|_{q^{-1}(z_i)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{\beta-1} O_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i} \simeq F_\beta|_{q^{-1}(z_i)}$となり、さらに仮定(A)より同型$\iota$があって$j\iota h|_{q^{-1}(z_i)}$は0-mapである。(∵ $a_1>\cdots>a_\alpha$ と $H^0(P^1, O_{P^1}(b))=0$ for $b<0$)
ここでℓ_1をLと交わるように動かし、さらに§1の$P^1\cup P^1$上のベクトル束の特長付けに注意する(定理1.1, 1.3)。すると$p^{-1}(L)$の点xに対し、$j\iota h\otimes k(x)$: $\bar F_\beta\otimes k(x) \longrightarrow F_\beta\otimes k(\tilde\sigma(x))$は0-mapである。
それ故

命題2.4. E を uniform ベクトル束とし F_ρ, $\tilde{F}_\rho$ は (2.3) を満すとする。さらに直線 L が(A)をもち σ を P^n の自己同型 ($\sigma L=L$) とする。その時次の同型写像 i_1, i_2 がある。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}_\rho|_{p^{-1}(L)} & \xrightarrow{i_1} & \tilde{F}_\rho|_{p^{-1}(L)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^{-1}(L) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & p^{-1}(L) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_\rho|_{p^{-1}(L)} & \xrightarrow{i_2} & F_\rho|_{p^{-1}(L)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p^{-1}(L) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & p^{-1}(L) \end{array}$$

これを使うと

系 2.5 次の図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} q^*E_i\otimes p^*\mathcal{O}(a_i)|_{p^{-1}(L)} & \longrightarrow & q^*E_i\otimes p^*\mathcal{O}(a_i)|_{p^{-1}(L)} \\ \downarrow & \wr & \downarrow \\ p^{-1}(L) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & p^{-1}(L) \end{array}$$

ところで命題2.4, 系2.5は条件(A)より弱い条件の下でも成立する。そのために

命題 2.6 M_1, M_2 を代数多様体 X 上のベクトル束とし, $f: M_1 \longrightarrow M_2$ を homomorphism とする。X の dense な部分集合 U が存在し、U の各点 u に対し、$f\otimes k(u): M_1\otimes k(u) \longrightarrow M_2\otimes k(u)$ が zero map と仮定する。その時 f は 0-homomorphism である。

命題 2.7　E を uniform ベクトル束とし P^n 上の直線 L に対し $q(p^{-1}(L))$ の dense な部分集合 U が次を満すと仮定する；「U の元 u, u' に対応する直線 l_u, $l_{u'}$ に対し $E|_{L\cup l_u} \simeq E|_{L\cup l_{u'}}$ である。」

その時 命題 2.4、系 2.5 が成立する。

次に命題 2.7 の仮定は uniform ベクトル束自体の性質であることを示す。そのために、次の準備が必要である。

$\bar{E} = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \mathcal{O}_{P^1}(a_i)^{\oplus r_i}$ ($a_1 > \cdots > a_\alpha$, $r_i > 0$), $X = \mathrm{Proj}(\mathcal{O}_{P^1} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(1)^{n-1})$ とし X 上のベクトル束の完全列：

$0 \longrightarrow \bar{F} \longrightarrow \bar{p}^*\bar{E} \longrightarrow F \longrightarrow 0$ を考える。($\bar{p} : X \to P^1$ は canonical projection とし rank $F = s$ とおく。)

その時、Kleiman の論文 [3] から morphism $f : X \longrightarrow \mathrm{Grass}_s \bar{E}$ が存在する。今 $\bar{E}$ の部分束 $A_\beta = \bigoplus_{j=1}^{\beta} \mathcal{O}_{P^1}(a_j)^{\oplus r_j}$ を考えると [3] によって $\mathrm{Grass}_s \bar{E}$ の closed subscheme の列 $\{\sigma_i(A_\beta)\}$ $(1 + \min(\bar{r}_\beta, \bar{r}_\gamma) \le i \le \max(0, \bar{r}_\beta - s))$ がある。(ここで $\bar{r}_\sigma = \sum_{j=1}^{\sigma} r_j$, $s = \bar{r}_\alpha - \bar{r}_\gamma$ である。) その時 (β, γ) $(1 \le \beta, \gamma \le \alpha)$ に対し、整数 d $(= d(\beta, \gamma))$ を次のように定義する。即ち

$\mathrm{Supp}\, \sigma_d(A_\beta) \supset \mathrm{Supp}\, f(X)$ かつ $\mathrm{supp}\, \sigma_{d+1}(A_\beta) \not\supset \mathrm{Supp}\, f(X)$

を満すようにdをとる。話を元のベクトル束Eに戻し、LをP^nの直線とする。今ベクトル束の列2.3を考え$p^{-1}(L)$上に制限する。上述の議論より整数$d(\beta,\gamma)$（特にLに注目して$d_L(\beta,\gamma)$と書く）が定まる。$\sigma_i(A_\beta)$の性質と$E(\ell_1,\ell_2,\beta,\gamma)$の定義から、

<u>命題2.8</u>　Lと交わる任意の直線ℓに対して$E(L,\ell;\beta,\gamma)\geq d_L(\beta,\gamma)$が成立する。$\ell$に対応する$p^{-1}(L)$の点を$x_\ell$とした時、$f(x_\ell)$が$\sigma_d(A_\beta)-\sigma_{d+1}(A_{\beta+1})$に含まれる$p^{-1}(L)$の元$x_\ell$に対し、$E(L,\ell;\beta,\gamma)=d_L(\beta,\gamma)$が成立する。さらに上のような$p^{-1}(L)$の部分集合をAとした時、$q(A)$は$q(p^{-1}(L))$のZariski open subsetを含む。

さて、P^nの直線Lを固定し、命題2.8のAを$A_{\beta,\gamma}$と書く。その時$\bigcap_{\beta,\gamma} q(A_{\beta,\gamma})$は$q(p^{-1}(L))$のZariski open Uを含む。今、$P^n$の自己同型$\sigma$を$\sigma L=L$のようにとると、$\sigma$は$Gr(n,1)$の自己同型$\tilde{\sigma}$を導き、$q(p^{-1}(L))$を動かさない。$\tilde{U}=U\cap\tilde{\sigma}U$とすると、これも$q(p^{-1}(L))$のZariski openである。この$\tilde{U}$に対しては、定理1.1と1.3より、次のよう

な性質がある；

$\tilde{U}$に対応するすべての直線ℓに対して

ベクトル束の同型 ι： $E|_{L\cup\ell} \xrightarrow{\sim} E|_{L\cup\sigma\ell}$ が存在する。それ故

命題2.9　Eを uniform ベクトル束，$L \in P^n$ の直線，σをLを固定するP^nの自己同型とする。その時，次の図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc}
q_{E_i} \otimes p^* \mathcal{O}_{P^n}(a_i)|_{p^{-1}(L)} & \xrightarrow{\sim} & q_{E_i} \otimes p^* \mathcal{O}_{P^n}(a_i)|_{p^{-1}(L)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
p^{-1}(L) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & p^{-1}(L)
\end{array}$$

xをLの点とし，$\sigma L = L$かつ$\sigma x = x$なる自己同型σを考える。そのσによって induce される自己同型$\tilde{\sigma}$：$Fl(n,1,0) \to Fl(n,1,0)$ は，$p^{-1}(x)$を固定し，その上の自己同型になっている。Lに対応する$p^{-1}(x)$の点をx_0とすると，$\sigma L = L$かつ$\sigma x = x$なる自己同型すべては$p^{-1}(x)$の自己同型でx_0を固定するものを導く。それ故

定理2.10.　Eを uniform ベクトル束，$E_1, \cdots, E_d$を，命題2.2で求めたものとする。その時，E_iは $Gr(n,1)$ 上の uniform ベクトル束である。

（E が $Gr(n.1)$ 上 uniform ベクトル束 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $Gr(n.1)$ をプリュッカー座標で P^N の部分多様体と見た時、$Gr(n.1)$ に含まれていて、P^N の直線になるもの（ℓ とおく）に対し、$E|_\ell$ が一定である。）

§3 ここでは、階数 r が底空間の次元より等しいか、小さい時、もしくは n を任意として r_i にある条件がある時、uniform ならhomogeneous を示す。

命題 3.1 E を P^n $(n \geq 3)$ 上の uniform ベクトル束とする。もし任意の i と任意の点 x $(\in P^n)$ に対し、$q^*E_i|_{p^{-1}(x)}$ が直線束の直和とする。その時、E は直線束の直和である。

（証）$p^{-1}(x)$ に p^*E を制限すると Krull-Schmit の定理と $H^1(P^2, L) = 0$（L：P^2 上の直線束）より、$q^*E_i|_{p^{-1}(x)} \cong \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}^{\oplus r_i}$ $(\forall i)$ がでる。これより容易にわかる。

さらに n に関する帰納法で次が示される。

定理 3.2 E を P^n 上の uniform ベクトル束とする。$n > \operatorname{rank} E$ なる E は直線束の直和である。

（証）命題 3.1. と定理 2.10 より明らか。

さらに命題3.1と定理2.10と3.2より

定理3.3　Eをuniformベクトル束とし、$r_i \leqq n-2$ $(\forall i)$とすると、Eは直線束の直和である。

次に$n = \mathrm{rank}\, E$の時のEの構造を調べるために、命題2.2のベクトル束の完全列；

$$0 \longrightarrow \check{F}_2 \otimes p^*\mathcal{O}(-a_1) \longrightarrow p^*\check{E}(-a_1) \longrightarrow q^*\check{E}_1 \longrightarrow 0$$

よりmorphism f：
$$\begin{tikzcd} Fl(n,1,0) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Gr_{r_1}\check{E}(-a_1) \arrow[dl, "t"] \\ & P^n & \end{tikzcd}$$
がある。

このfについて、P^n上に直線Lをとって、$p^{-1}(L)$上で、上の完全列、図式を考える。その時

命題3.4　上のfについて、次の2つの場合になる。

(i) fはtのsectionをもつ。つまりEは階数r_1の商ベクトル束をもつ。

(ii) fはclosed immersionである。

注意3.5　(i)の時、E_1はtrivialなベクトル束になることが示され、$\mathrm{Ker}(E \to E_1 \to 0)$はuniformベクトル束である。

特に$r = n$, $r_1 = 1$とすると(i)の場合は注意

3.5 と定理 3.2 より、又 (ii) の場合は、$Fl(n, 1, 0) \cong Gr_{r_1}(E)$ になり

<u>定理 3.6</u> E を P^n 上の階数 n の uniform ベクトル束とする。その時、E は直線束の直和か $T_{P^n} \otimes \mathcal{O}_{P^n}(c)$ か $\Omega_{P^n} \otimes \mathcal{O}_{P^n}(d)$ のいずれか 1 つである。

命題 3.4 の (ii) の場合、階数が n より大きくても、次のような結果がでる。

<u>命題 3.7</u> 命題 3.4 の (ii) の場合で $r_1 = 1$ とする。さらに $r \leqq 2n-1$ の時には morphism f は次のようなことしか起らぬ ($f|_{p^{-1}(x)}$ を f_x とかく)

(i) $n=2$ の時 f_x は linear map か 2 次の map である

ii) $n \geqq 3$ の時 f_x は linear map である。

(証) $g : P^m \longrightarrow P^r$ ($r \leq 2m$) で g が closed immersion なる、$g^* \mathcal{O}_{P^r}(1) = \mathcal{O}_{P^m}(c)$ とすると $c = 1, 2$ しかない。$n \geqq 3$ の時、E は uniform という条件を使って、2 次の場合は起りえないことが出る。

<u>注意 3.8</u> 命題 3.7 の結果として P^2 上の uniform ベクトル束で階数が 3 以下なら homogeneous である。又 $n \geqq 3$ 以上で、上の条件の

下では E は $T_{P^n}(*)$ (又は $\Omega_{P^n}(*)$) と直線束達の直和になる。($T_{P^n}(*)$ は T_{P^n} とある直線束 $\mathcal{O}_{P^n}(*)$ との積を意味する。)

§4 ここでは主定理のの証明をする。

まず homogeneous ベクトル束を調べる。

命題 4.1. E を P^n 上の階数 $2n-1$ 以下の homogeneous ベクトル束とする。その時 E は次のような場合がある。

1) 直線束の直和

2) $T(*) \oplus$ ($\oplus$ 直線束) 又は $\Omega(*) \oplus$ ($\oplus$ 直線束)

特別な場合として

$n=4$. $\overset{2}{\wedge} T_{P^4}(*) \oplus$ (直線束)

$n=2$. $S^2(T_{P^2})(*)$

但し $M(*)$ はベクトル束 M と直線束 $\mathcal{O}_{P^n}(*)$ との積を表わす

証) $SL(n+1, k)$ の表現を調べればよい。

次に $n \geq 3$ で E が P^n 上の階数 $2n-1$ 以下の uniform ベクトル束とする。さらに任意の i に対し $q^*E_i|_{p^{-1}(x)}$ が階数 $2n-3$ 以下の homogeneous ベクト

ル束と仮定する。この時まず、$qE_i|_{p^{-1}(x)}$ は x によらず一定であることが命題2.9よりでてくる。そして $qE_i|_{p^{-1}(x)}$ の構造とくに $q\check{E}_1|_{p^{-1}(x)}$ の構造を決めよう。p^*E の splitting を使って命題4.1より $p^{-1}(x)$ 上の cohomology を考えると $\sum_{i=1}^{\alpha} h^0(qE_i|_{p^{-1}(x)}) \leq 2n+1$, $\sum_{i=1}^{\alpha} h^0(q\check{E}_i|_{p^{-1}(x)}) \leq 2n+1$ がでる。それ故 $q\check{E}_1|_{p^{-1}(x)}$ は次のようなタイプが考えられる.

i) $\mathcal{O}^s \oplus \mathcal{O}_{P^{n-1}}(1)^t \oplus T(-1)^w \quad (0 \leq t \leq 2,\ 0 \leq w \leq 1)$

特別な例として

ii) $n-1=2 \quad S^2(\check{U})$

iii) $n-1=3 \quad \Omega_{P^3}(2) \oplus \mathcal{O}^s \quad (0 \leq s \leq 2)$

iv) $n-1=4 \quad \Omega_{P^4}(2) \oplus \mathcal{O}^s \quad (0 \leq s \leq 1)$

しかし実際には、次のような場合しか、起こらないことが示される。

<u>命題 4.2</u>　E を P^n $(n \geq 3)$ 上の階数が $2n-1$ 以下の uniform ベクトル束とし $\operatorname{rank} E_i \leq 2n-3$ $(\forall i)$ で $qE_i|_{p^{-1}(x)}$ が homogeneous ベクトル束とする。この時、$q\check{E}_1|_{p^{-1}(x)}$ は次のようになる。

i) $\mathcal{O}^s_{P^{n-1}}$　　ii) $\mathcal{O}^s_{P^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{P^{n-1}}(1)$　　iii) $\mathcal{O}^s_{P^{n-1}} \oplus T_{P^{n-1}}(-1)$

iv) $n-1=3 \quad \Omega_{P^3}(2) \oplus \mathcal{O}^s_P \quad (0 \leq s \leq 1)$

さらに命題 4.2 をくわしく調べると

命題 4.3　命題 4.2 と同じ条件の下で、E は次のようになる。

i) 直線束の直和

ii) $T(*)$ (又 $\Omega(*)$) と直線束の直和

iii) $n=4$ の時は $(\overset{2}{\wedge} T_{P^4})(*)$ 又は $(\overset{2}{\wedge} T_{P^4})(*) \oplus$ 直線束

即ち E は homogeneous である。

それ故主定理の証明は n に関する帰納法で示される。即ち P^2 上の階数 3 以下なら命題 3.7 より homogeneous である。今 $n-1$ まで正しいと仮定して n の時を考える。もし r_1 又は r_2 が 1 なら命題 3.7 より E が homogeneous。そうでない時 $\mathrm{rank}\, q^*E_1 \leq 2n-3$ になり定理 2.10 より $q^*E_1|_{p^{-1}(x)}$ は uniform。さらに帰納法の仮定より homogeneous。それ故、命題 4.3 より E は homogeneous になる。

§5. ここでは主定理の②について述べる。

次のよく知られた結果をつかう。

「$f : P^n$ から P^{2n} への線型写像でない closed immersion が存在し、$f^*\mathcal{O}_{P^{2n}}(1) = \mathcal{O}_{P^n}(2)$ である」

今 $S = f(P^n)$ とし $T_{P^{2n}}(-1)|_S = E_0$ を考えると、これが求めるものである。

C を射影空間 P^N に入っている2次曲線 $(\cong P^1)$ とすると、C は既にある部分空間 P^2 に含まれている。$T_{P^N}(-1)|_{P^2} \simeq \mathcal{O}_{P^2}^{N-2} \oplus T_{P^2}(-1)$ より

命題 5.1 $\quad T_{P^N}(-1)|_C \cong \mathcal{O}_C^{N-2} \oplus T_{P^2}(-1)|_C$

さらに

命題 5.2 $\quad T_{P^2}(-1)|_C \cong \mathcal{O}_{P^1}(1)^2$ より $E_0|_\ell \cong \mathcal{O}_{P^1}^{2n-2} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(1)^2$ となる(即ち E_0 は uniform ベクトル束になる。)

∵ $H^0(T_{P^2}(-1)) \ni s$ で s の零点で C 上にある s が存在する。$\mathcal{O}_{P^2} \xrightarrow{s} T_{P^2}(-1)$ を C 上に制限したものを考えるとこれから $\mathcal{O}(1) \longrightarrow T_{P^2}(-1)|_C$ なる injection を導き、$T_{P^2}(-1)|_C \cong \mathcal{O}(1)^2$ を得る。

次に P^n 上の階数 $2n$ の homogeneous ベクトル束をすべて見つける。

命題 5.3　P^n 上の rank $2n$ の homogeneous ベクトル束は、既約な homogeneous ベクトル束の直和で表わされる。

それ故 E_0 は global section で生成されていること、$c_i(E_0) = 2^i H^i$（E_0 の i 次 Chern 類、H は超平面（$\cong P^{n-1}$）の有理同値類）と命題 5.3 を使うことにより homogeneous ベクトル束でないことが示される。

Reference.

(1) Elencwajg G　Des fibrés uniformes non homogènes Math. Ann. 239 185–192 (1979)

(2) Elencwajg. G, Hirschowitz. A., Schneider. M.　Les fibres uniforms de rang au Plus n sur $P_n(\mathbb{C})$ sont ceux qu'on croit. (to appear)

(3) Kleimann S　Geometry on Grassmannian and application to splitting bundle and smoothing cycles Publ. Math. I.H.E.S 36 (1969)

追記）その後主定理①の部分の証明は不完全であることが分かり、問題として残されている。（2月15日記）